

# El Zitterbewegung: un acercamiento entre la geología y la mecánica cuántica

Por

Marco Alfaro

Ingeniero Civil de Minas

Doctor en Geoestadística

Académico USS

Enero 2005



# Resumen

Se presenta, en un formato visual y de divulgación, el problema del cálculo del error de estimación de una formación geológica, a partir de una malla de sondajes.

Inesperadamente, al aplicar las técnicas geoestadísticas aparece un fenómeno inesperado, el Zitterbewegung, el cual se estudia en mecánica cuántica.

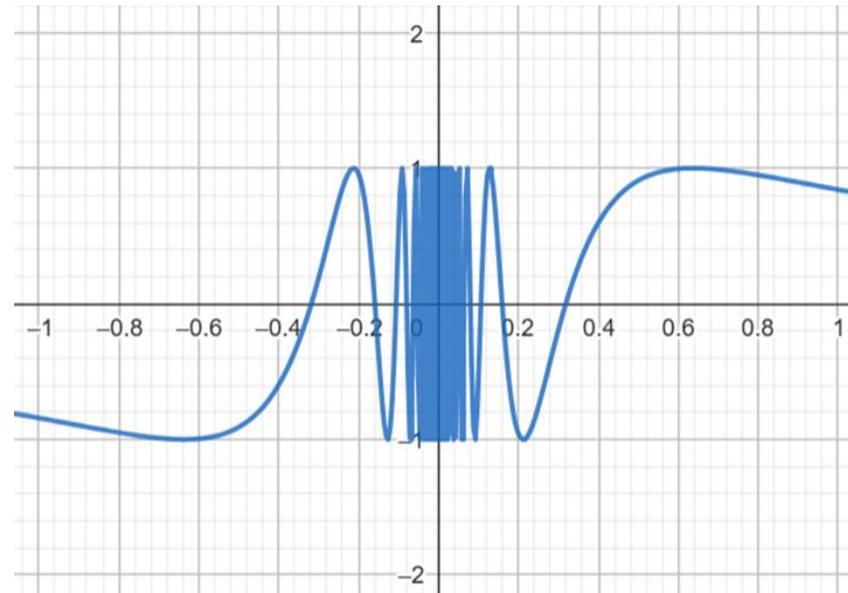
Se discute la herramienta covariograma geométrico realizando el cálculo numérico de la varianza del error y detectando la presencia del Zitterbewegung en un ejemplo simple.

# I. Introducción ¿Qué es el Zitterbewegung?

El Zitterbewegung (del alemán, Bewegung, 'movimiento' y Zitter 'tiritón', 'tembloroso', 'trémulo') es un movimiento de vibración ultrarrápido alrededor de la trayectoria de una partícula cuántica,

La mecánica cuántica es la parte de física que estudia la naturaleza a escalas espaciales pequeñas.

**Ejemplo:**

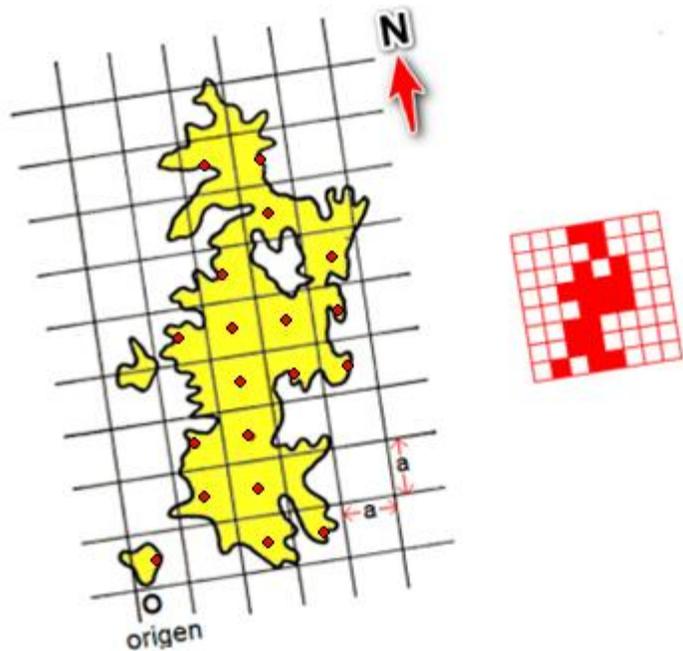


**La función  $\sin(1/x)$  es discontinua en  $x = 0$**

la función  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  comienza a tiritar cuando  $x \rightarrow 0$

# Presentación del problema

Un problema muy común en geología y minería es calcular el área de una formación geológica S.



Cateo de origen

La figura muestra la Pampa Yumbes, un depósito de Nitratos Yodo localizado al Norte de Chile (la Pampa). El área amarilla S se ha reconocido con una malla regular cuadrada axa. Se observan 19 sondajes positivos que caen en la zona S, que determinan las cuadrículas rojas a la derecha. Parece natural estimar el área de S por:

$$S^* = 19 a * a = 19 a^2$$

En la práctica, el lado a de la malla es de 400m. Este reconocimiento se llama, en la Pampa, cateo de origen. Posteriormente se afina la malla, llegando a un valor a del orden de 35m, lo que se llama cateo de control.

# El error de estimación

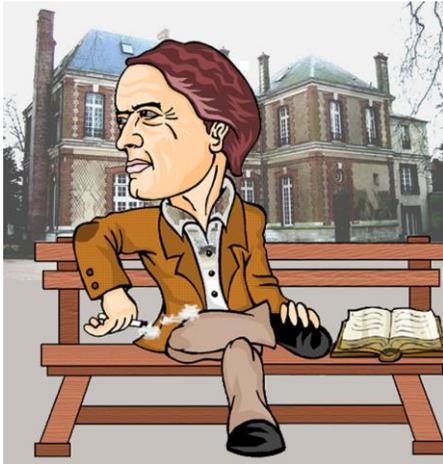
Aparece una pregunta evidente ¿ cuál es el error  $E$  cometido al estimar  $S$  por  $S^*$  ? ( $S$  es el área real, desconocida)

Se observa que el error  $E = S - S^*$  varía cuando se traslada el origen  $O$  algunos metros. Podemos decir que este error es aleatorio y depende de la localización del origen de la malla: se asume entonces que el origen  $O$  es una variable aleatoria uniforme en el cuadrado  $axa$ . En otras palabras, el origen está al azar en un cuadrado de lado  $a$ . Por consiguiente, el error  $E$  es una variable aleatoria.

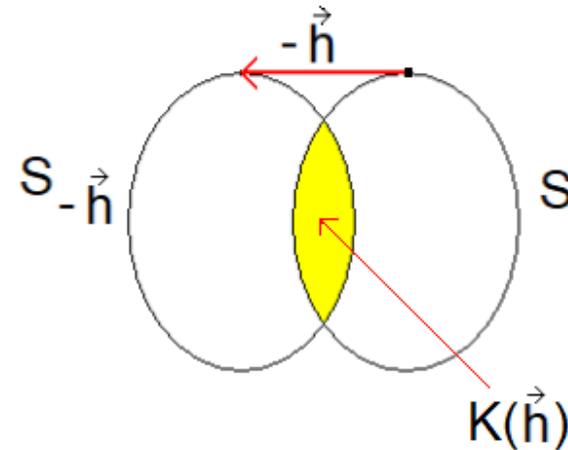
El profesor Georges Matheron demostró que, en estas condiciones, el error tiene una esperanza matemática nula (es insesgado) y tiene una varianza que estudiaremos a continuación.

Necesitamos previamente, conocer la herramienta llamada covariograma geométrico  $K(h)$ .

# El covariograma geométrico de un área $S$



Georges Matheron, dibujo de Marco Alfaro.  
Fue un gran fumador. También se observa  
su libro en idioma ruso.  
Un gigante de la geo matemática



El covariograma geométrico es la medida (área) de la  
intersección de  $S$  con su trasladado en el vector  $-\mathbf{h}$ .  
 $K(\mathbf{h})$  depende del vector  $\mathbf{h}$ , en magnitud y sentido.

**Las propiedades elementales del covariograma geométrico son:**

$$K(\vec{h}) \leq K(0) = S$$
$$K(-\vec{h}) = K(\vec{h})$$

# La varianza del error de estimación de una superficie

En las condiciones anteriores, Matheron demostró la fórmula siguiente, la cual depende de la función  $K(h)$ , covariograma geométrico de la superficie  $S$ :

$$\sigma_E^2 = a^2 \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} K(ia,ja) - \iint_{x,y=-\infty}^{x,y=+\infty} K(x,y) dx dy \quad (1)$$

$$K(\vec{h}) = K(h_x, h_y), \text{ en 2D}$$

Que es la diferencia entre una sumatoria y una integral, la cual se puede aproximar al usar la fórmula de Euler Mac Laurin para integrales dobles.

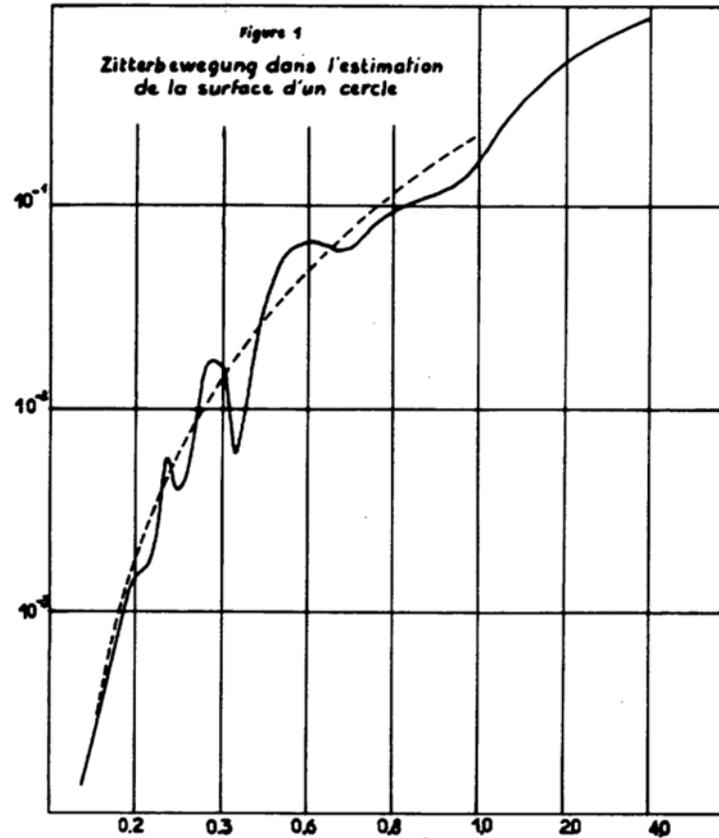
# Aplicación al cálculo del área de un círculo de diámetro 1 reconocido por una malla cuadrada de lado a

Para dar un ejemplo de la existencia del fenómeno inesperado del Zitterbewegung y sus órdenes de magnitud, Matheron estudió numéricamente la fórmula (1) y graficó la varianza del error, en el caso de un círculo de diámetro 1, en función de la malla de reconocimiento cuadrada de lado a. También graficó la aproximación de esta varianza que es :

$$\sigma_E^2 \approx 0.2276a^3 + 0.0047a^5 \quad (2)$$

Obtuvo finalmente, el gráfico siguiente, el cual reproducimos en su versión original. Este gráfico, el “Maestro”, lo incluyó en casi todos sus libros (ver G. Matheron, “Estimar y Elegir”, Escuela de Minas de París, 2008)

# Gráfico del Zitterbewegung



En abscisa, el diámetro  $a$  y en la ordenada, la variancia  $\sigma_E^2$ . En línea de puntos la aproximación (2) y en trazo lleno, el valor exacto, fórmula (1).  
Se observan fluctuaciones inesperadas.

# Estudio de la curva de la varianza del error

Se observan fluctuaciones importantes que indican que, en ciertos intervalos, al achicar la malla de sondajes, crece la varianza del error, lo cual no es, para nada intuitivo.

Sin embargo, no se ven “tiritones”.

La causa de la ausencia de tiritones es que el gráfico no es correcto. En efecto, el profesor Matheron realizó los cálculos, a fines de la era de 1950, sin la ayuda de una computadora, utilizando una calculadora manual “FACIT”



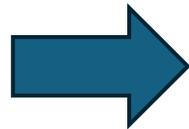
**La calculadora manual FACIT**

# Cálculo con medios computacionales modernos

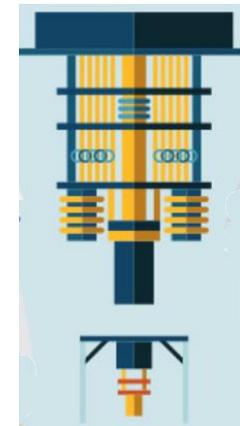
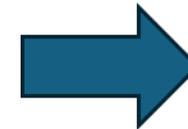
Por consiguiente, hemos realizado los cálculos de la varianza de estimación utilizando métodos computacionales más modernos (computador I7 y un compilador con precisión extendida), obteniéndose los resultados de la figura de la página siguiente:



Calculadora manual



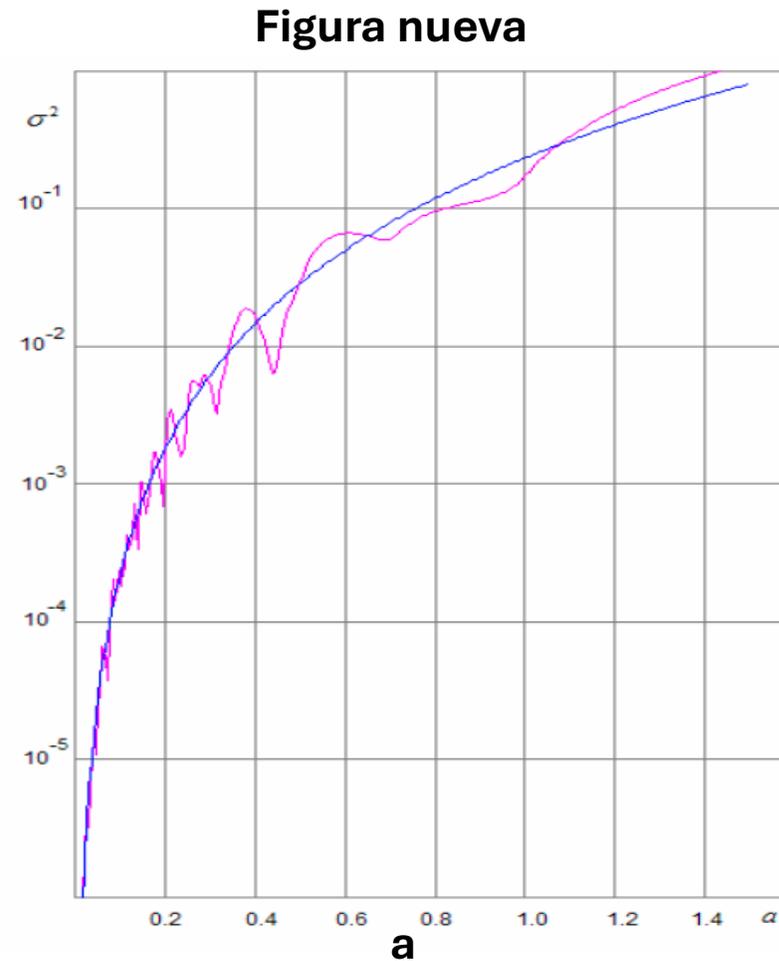
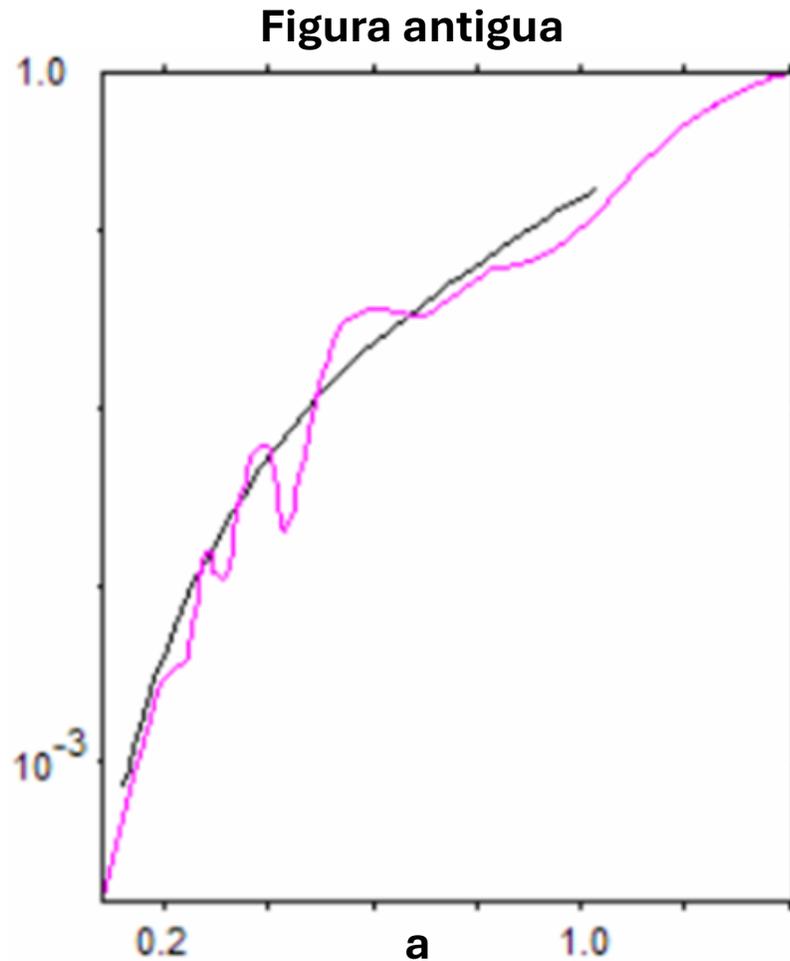
Súper computadora



computador cuántico

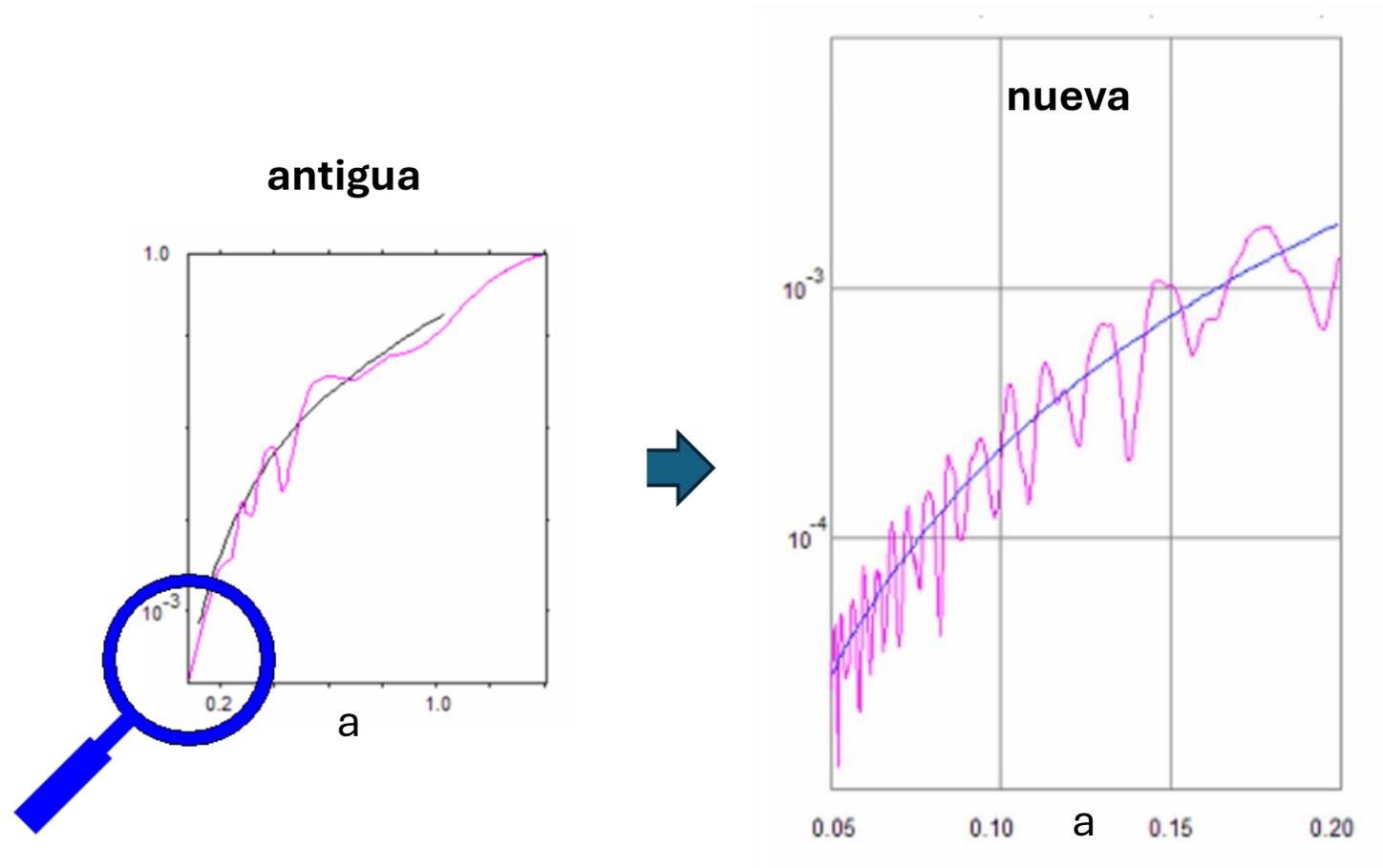


# Comparación de los resultados



**Se observa que para valores grandes del lado  $a$ , las curvas son casi las mismas, sin embargo, cuando  $a < 0.2$ , se observa una diferencia notable y aparecen los tiritones.**

# Un acercamiento para $a < 0.2$



En efecto, a la izquierda, curva antigua, sin tiritones en el intervalo  $a < 0.2$ . A la derecha, curva nueva con gran cantidad de tiritones, los cuales no se amortiguan.

# Conclusiones

Hemos presentado, sin entrar en complicaciones teóricas, el fenómeno del Zitterbewegung, en un caso mundano en minería, que es el cálculo del error de estimación del área de una formación geológica.

Las aplicaciones de la mecánica cuántica a la minería son variadas, algunas de ellas: sensores cuánticos para detectar y analizar la presencia de minerales a niveles milimétricos, algoritmos cuánticos para optimizar los procesos mineros, aplicación al análisis de la estructura de las rocas y predecir su comportamiento, el uso de computadores cuánticos.

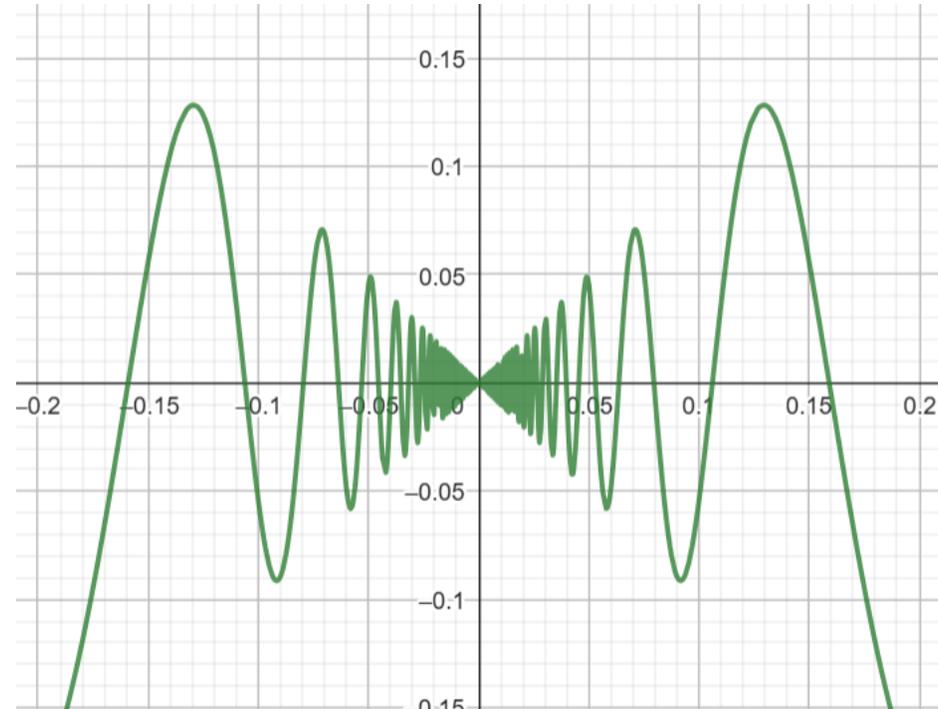
La minería cuántica es un campo que combina la física cuántica con la minería, que tiene aplicaciones actuales en minería: la nano y la bio nano minería.

Es importante seguir investigando y explorando nuevas aplicaciones.

# Referencias

- Georges Matheron: “Estimar y Elegir”, traducción al español por Marco Alfaro 2008. Escuela de Minas de París.
- Georges Matheron: “Las variables regionalizadas y su estimación”, traducción al español por Marco Alfaro 2007. Escuela de Minas de París.
- Georges Matheron: “Curso de Geoestadística”, traducción al español por Marco Alfaro, 2010.
- Georges Matheron: “Las variables regionalizadas y sus aplicaciones, traducción al español por Marco Alfaro” 2012
- Marco Alfaro: “Introducción práctica a la Geoestadística, Escuela de Minas de Madrid, 1975.

# Anexo 1



La función  $x * \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  tiritita y tiende a 0 cuando  $x \rightarrow 0$

## Anexo 2

# Covariograma geométrico de un círculo y una esfera de diámetro $d$

El círculo y la esfera son figuras isótropas, luego:

$$\text{Círculo} \quad \left\{ \begin{array}{l} K(h) = \frac{d^2}{2} \text{Arccos}\left(\frac{h}{d}\right) - \frac{h}{2} \sqrt{d^2 - h^2} \quad \text{si } |h| \leq d \\ K(h) = 0 \quad \text{si } h > d \end{array} \right.$$

$$\text{Esfera} \quad \left\{ \begin{array}{l} K(h) = \frac{\pi d^3}{6} \left( 1 - \frac{3h}{2d} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{d} \right)^3 \right) \quad \text{si } h \leq d \\ K(h) = 0 \quad \text{si } h > d \end{array} \right.$$

